國立高雄大學九十八學年度研究所博士班招生考試試題

考試科目：數理統計

考試時間：100分鐘　　　　　　　　　本科原始成績：滿分100分

每題20分, 須附上該有之步驟。

1. 設X, Y為二獨立的$\mathcal{C}(0, a)$分佈隨機變數, $a > 0$。令$Z = X/Y$。

   (i) 試求Z之機率密度函數(p.d.f)f。

   (ii) 試給出f之不連續點之集合。

   (iii) 試求Z之期望值。

   (iv) 試求$U = 1/Z$之分佈。

2. 設$X_1, \cdots, X_n$, 為一組由$\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$分佈所產生之隨機樣本。$\mu, \sigma^2$皆設為未知。

   (i) 試給出$\theta = (\mu, \sigma^2)$之一完備充分統計量。

   (ii) 試給出σ之UMVUE $\hat{\sigma}$。

   (iii) 試證$n \to \infty$時, $\sqrt{n}(\hat{\sigma} - \sigma) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \sigma^2/2)$。

   (iv) 試求$\lim_{n\to\infty} nVar(\hat{\sigma})$。

3. 設$X_1, \cdots, X_n$,為一組由$\mathcal{N}(\theta_1, \theta_3)$分佈所產生之隨機樣本, $Y_1, \cdots, Y_m$為一組由$\mathcal{N}(\theta_2, \theta_3)$分佈所產生之隨機樣本,二組隨機樣本假設為相互獨立。又設$\theta_1, \theta_2 \in R, \theta_3 > 0$皆為未知。欲檢定$H_0 : \theta_1 = \theta_2$, vs. $H_a : \theta_1 \neq \theta_2$。在$n + m > 2$之假設下, 試求概似比檢定(LRT, likelihood ratio test)。

4. 設$X_1, \cdots, X_n$為一組由$\mathcal{P}(\theta)$分佈所產生之隨機樣本, 又設θ之事前分佈為$\Gamma(r, \beta)$。令$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n)$。

   (i) 在給定$\mathbf{X} = \mathbf{x}$下, 試求θ之事後分佈。

   (ii) 試求θ之一$(1 - \alpha)$貝氏信賴區間。

5. 設$\{X_1, \cdots, X_n\}, \{Y_1, \cdots, Y_m\}$為二組獨立的樣本, 分別以$F_1$及$F_2$為其共同的分佈函數。欲檢定$H_0 : F_1 = F_2$, vs. $H_a : F_1 > F_2$。試給出一顯著水準為α之檢定。並說明樣本數較大時, 可取何近似的拒絕域。