國立高雄大學 115 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

作答時請於答案卷上註明題號，計算題須附上推導過程。

一、選擇題：

1. (5%) 設 $x^3+3xy+2y^2=4$，求在給定 $x=2, y=-2$ 時，$\frac{dy}{dx}=?$

(A) 3； (B) 2； (C) 0； (D) −3

2. (5%) 下列何者為偶函數(even function)：

(A) $\sin(x)$； (B) $x\sin(x)$； (C) $x+\cos(x)$； (D) x^3+x

3. (5%) 設 $f(x)$ 定義於某點 $x=a$ 的一個鄰域內。請問下列敘述何者必然正確？

(A) 若 $\lim_{x\to a^-} f(x)=f(a)$，則 $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$；

(B) 若 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在，則 $f'(a)$ 存在；

(C) 若 $f(a)$ 存在，則 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在；

(D) 若 $\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 存在，則 $\lim_{x\to a} f(x)$ 存在。

4. (5%) 設函數 $f(x)=\frac{4x+3}{x+6}$，則下列敘述何者正確？

(A) 此函數在 $(-\infty,\infty)$ 連續； (B) 此函數為奇函數(odd function)；

(C) 此函數之反函數為 $f^{-1}(x)=\frac{3-6x}{x-4}$； (D) 以上皆非。

科目：微積分　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

二、計算題：

5. 試回答以下問題：

(1) (10%) 請證明

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2/2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}};$$

(2) (10%) 利用(1)的結果，求

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2x^2}dx$$

6. 令 $a_n = 2^n/n!, n = 0,1,2,\cdots,$ 其中 $n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 1$ 且 $0! = 1$，回答以下問題：

(1) (10%) 請證明級數 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收斂；

(2) (10%) 求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 之值。

7. (10%) 令 $y = xe^{-2x} + 3^{x^2-2x}$，求 $\frac{dy}{dx}$ 。

8. (10 分) 試求不定積分

$$\int \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

9. (10 分) 令 $f(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$，求

$$\int_{-1}^{2}\int_{1}^{4} f(x,y)dxdy$$

10. (10 分) 試求曲線 $y = x^2 - x$ 上最接近 $(1,1)$ 的點。