

國立高雄大學 106 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分
考試時間：100 分鐘

系所：統計學研究所(統計組)
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

一、選擇題(可複選)

1. (5%)下列函數何者在 $x = 0$ 之極限存在：

$$(1) f(x) = \begin{cases} 1, & x < 0 \\ 0, & x \geq 0 \end{cases}; \quad (2) g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}; \quad (3) h(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases};$$

(4) 以上皆不存在。

2. (5%)下列何者非為 $f(x)$ 在 $x = a$ 點連續之必要條件：

(1) $f(a)$ 有定義；(2) $f(x)$ 在 $x = a$ 點之左極限與右極限存在；

(3) $f(x)$ 在 $x = a$ 點之極限值為 $f(a)$ ；(4) $f(x)$ 在 $x = a$ 點上可微。

3. (5%)令 Q 代表有理數之集合。考慮函數 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$ ，則 $f(x)$ 在何點連續：

(1) 1；(2) 2；(3) 4；(4) 以上皆非。

4. (5%)承上，考慮函數 $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ x, & x \in Q^c \end{cases}$ ，則 $f(x)$ 在何點連續：

(1) 1；(2) 2；(3) 4；(4) 以上皆非。

5. (5%) 假設函數 $f(x) = \frac{4x+3}{x-6}$ ，則下列敘述何者正確：

(1) 此函數在 $(-\infty, \infty)$ 連續；(2) 此函數之反函數為 $f^{-1}(x) = \frac{6x+3}{x+4}$ ；

(3) 此函數為奇函數；(4) 以上皆非。

二、是非題

6. (5%)若函數 $f(x)$ 於 $x = a$ 不可微，則 $f(x)$ 於 $x = a$ 必不連續。

7. (5%)若 $f(x)$ 之一階與二階導數於 $x = a$ 之值為零(即 $f'(a) = 0$ 且 $f''(a) = 0$)，則 $f(a)$ 必為局部極大或極小值。

8. (5%)考慮一實數列 $\{a_n\}$ ，其中 $a_n \rightarrow c$ 。令 $f(x)$ 為一在 $\{a_n\}$ 上均有定義之函數，則 $f(a_n) \rightarrow f(c)$ 。

9. (5%) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收斂，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ 。

10. (5%) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 發散，則 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$ 。

三、問答與計算題

11. 試驗證下列級數收斂或發散。

$$(1)(5\%) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}; \quad (2)(5\%) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}; \quad (3)(5\%) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3-1}.$$

12. 試解下列不定積分式。

$$(1)(5\%) \int \sin(x)\sin(2x)\sin(4x)dx; \quad (2)(5\%) \int \frac{1}{x-\sqrt{1-x^2}}dx; \quad (3)(5\%) \int \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx.$$

國立高雄大學 106 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分
考試時間：100 分鐘

系所：統計學研究所(統計組)
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

13. 考慮函數 $f(x)$ 為一定義在實數域 R 上連續型隨機變數 X 之機率密度函數，則此隨機變數之機率分布函數為 $f(x)$ 之反導函數，定義為 $F(x)$ 且滿足 $F(-\infty) = 0$ 。若定義一機率函數 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ 。

(1) (10%) 試證明連續型隨機變數之任意單點機率函數 ($P(X = a), a \in R$) 其值為 0。

(2) (10%) 試求 $\frac{P(X=a)}{P(X=b)}$ 之值(以機率密度函數表示)，其中 $a, b \in R$ 。