# 國立高雄大學 107 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

一、　選擇題(可複選)

1. (5%)下列對函數$f(x)=\sin(x)$的敘述何者為真：

   (1) $f(x); x\in(-\infty,\infty)$上連續可微； (2) $f(x); x\in(-\infty,\infty)$上為一對一映成函數(one one onto function)；(3)其反函數$f^{-1}:(-1,1)\to\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$存在；(4) 以上皆非。

2. (5%)若函數$f(x)$於$(-\infty,\infty)$連續，則下列敘述何者為真：

   (1) $\int_0^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_0^c f(x)dx$； (2) $\int_{-\infty}^0 f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^0 f(x)dx$；

   (3) $\int_{-\infty}^\infty f(x)dx=\lim_{c\to\infty}\int_{-c}^c f(x)dx$； (4) 以上皆非。

3. (10%)下列無限級數何者收斂：

   (1) $\sum_{n=1}^\infty \frac{7n}{2n^2+4}$； (2) $\sum_{n=1}^\infty \frac{5n^2}{2\sqrt{n^5}+3}$；(3) $\sum_{n=1}^\infty \frac{\log(n)}{\sqrt{n^3+1}}$,其中$\log(e)=1$； (4)以上皆非。

二、　是非題

1. (5%)若一上升數列(increasing sequence)有上界 M，則該數列必收斂至 M。
2. (5%)考慮一有理數集合$\{x\in Q|x^2<5\}$，則該集合有最小上界。
3. (5%)若數列$\{a_n\}$收斂，則對任意連續函數$f$，$f(a_n)$必收斂。
4. (5%) 若$\sum_{n=1}^\infty\{c_n+a_n\}$收斂，則$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}c_n=0$。
5. (5%) 若$\sum_{n=1}^\infty\{c_n+a_n\}$發散，則$\lim_{n\to\infty}\{c_n+a_n\}\neq 0$。

三、　問答與計算題

# 國立高雄大學 107 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：微積分　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. 考慮兩正常數$a > b > 0$，令$a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$和$b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$, $n \geq 0$ 分別代表算術平均數與幾何平均數，其中$a_0 = a, b_0 = b$。證明：

   (1) (5%) $a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n$。

   (2) (5%) 數列$\{a_n\}$與$\{b_n\}$收斂。

   (3) (5%) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$。

2. (1) (5%)證明若$f$與$g$互為反函數，且$f$可微，則對使得$f'(g(x))$非零之$x$值，$g'(x)$存在且$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$。

   (2) (5%)試利用上式求$f(x) = \exp(x); x \in (-\infty,\infty)$反函數$g(x) = \log(x);\ x \in (0,\infty)$之導數。

3. 試討論並求下列積分式：

   (1) (15%) $\int_1^\infty \frac{1}{x^p} dx\ ; p \geq 0$；

   (2) (15%) $\int \sin^4(x)\cos^2(x)\, dx$。

背面尚有試題