國立高雄大學 115 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. 是非題，請依照命題回答「正確」或「錯誤」，若認為命題錯誤，請寫出原因或舉出反例。
   (a) (3%) 統計量為隨機樣本及未知參數的函數。
   (b) (3%) 隨機變數之機率密度函數值可能超過 1。
   (c) (3%) 中位數若存在，其值唯一。
   (d) (3%) 於一般條件下，最大概似估計量若存在，則為不偏估計量。
   (e) (3%) 常態分佈之母體平均數、中位數、眾數皆相同。

2. 假設現有一組隨機樣本 $X_1, \dots, X_n$。給定t，令 $\theta = P(X_i \le t)$。
   (a) (5%) 給定t，令 $Y_i = I(X_i \le t)$，其中$I(\cdot)$為指標函數，則 Y_i 之分佈為何？
   (b) (5%) 找出 θ 之不偏估計量。
   (c) (10%) 於大樣本之下，建構 θ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。

3. 假設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組母體分佈為 $N(\mu, \sigma^2)$ 之隨機樣本，其中(μ, σ^2)皆為未知參數，其機率密度函數為

$$f(\mathrm{x} \mid \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}.$$

   (a) (5%) 找出 $\theta = (\mu, \sigma^2)$ 之最小充分統計量。

   (b) (5%) 找出 μ 之不偏估計量。

   (c) (10%) 建構 μ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間。

   (d) (5%) 令$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$，其中$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$。利用$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$證明$S^2$為$\sigma^2$之不偏估計量。

   (e) (10%) 欲檢定虛無假設 $H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$ 與對立假設 $H_1: \sigma^2 < \sigma_0^2$，找出其檢定統計量及在虛無假設下檢定統計量之分佈。

4. (15%) 假設 $X_1, \dots, X_n$ 為一組母體分佈為 $\Gamma(\alpha, \beta)$ 之隨機樣本，其機率密度函數為

$$f(x \mid \alpha, \beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \alpha, \beta > 0.$$

   試以動差估計法(method of moments)估計未知參數 (α, β)。

科目：統計學　　系所：統計學研究所(無組別)　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

5. 假設 $X_1, \ldots, X_n$ 為一組母體分佈為 Poisson(λ) 之隨機樣本，$\lambda > 0$，即

$$f(x \mid \lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x = 0,1,2, \ldots$$

(a) (10%) 試求 λ 之最大概似估計量(maximum likelihood estimator)。

(b) (5%) 試求 $P(X_i = 0)$ 之最大概似估計量。