

國立高雄大學 109 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學
考試時間：100 分鐘

系所：統計學研究所(無組別)
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

1. (5%) 設一隨機變數 X 來自於二項分佈，亦即 X 有 $\mathcal{B}(4, \theta)$ 分佈。試求 $E(\sin(\pi X/2))$ 。
2. 設 $Y|P$ 有 $\mathcal{B}(n, P)$ 分佈且 P 的機率密度函數為 $f(p) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}$, $\alpha, \beta > 0$, $0 < p < 1$ 。
 - (a) (10%) 試證 Y 之非條件分佈為 $P(Y = y) = \binom{n}{y} \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(y + \alpha)\Gamma(n - y + \beta)}{\Gamma(\alpha + \beta + n)}$, $y = 0, 1, \dots, n$ 。
 - (b) (10%) 試求 Y 之期望值及變異數。
3. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由參數為 λ 之指數分佈所產生之隨機樣本，且其機率密度函數以 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$ 表之。
 - (a) (10%) 試證 $S = \sum_{i=1}^n X_i$ 為 λ 的完備充分統計量。
 - (b) (10%) 試證 $2\lambda S$ 來自具自由度為 $2n$ 的卡方分佈。
 - (c) (10%) 試求 $P(X \geq a)$ 之最大概似估計值(Maximum Likelihood Estimator, MLE)。
 - (d) (10%) 試給一 α 下之 $H_0: \lambda = \lambda_0$, vs. $H_a: \lambda \neq \lambda_0$ 的概似比檢定(Likelihood Ratio Test, LRT)。
4. (10%) 假設某廠牌燈管壽命的機率密度函數為 $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$ ，且其期望值為 10,000 小時。某公司近期安裝 50 支該廠牌的燈管，試求至少有一燈管 30,000 小時後仍可使用之機率。
5. (5%) 設 X_1, \dots, X_n 為一組來自參數為 θ 的波松分佈所產生之隨機變數， $\theta > 0$ 。試給出 θ 之兩種動差估計量。
6. 設 X_1, \dots, X_{n_1} 及 Y_1, \dots, Y_{n_2} 分別為由 $\mathcal{N}(\mu_x, \sigma_x^2)$ 及 $\mathcal{N}(\mu_y, \sigma_y^2)$ 分佈所產生之隨機樣本，其中 $\mu_x, \mu_y, \sigma_x^2, \sigma_y^2$ 皆為未知。
 - (a) (10%) 設 $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ ，試給一 α 下 $H_0: \mu_x - \mu_y = 0$, vs. $H_a: \mu_x - \mu_y \neq 0$ 之檢定。
 - (b) (10%) 試給出一 σ_x^2/σ_y^2 的 $(1 - \alpha)$ 信賴區間。