

國立高雄大學 108 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

1. 回答下列問題，並定義所使用之符號，如令 $f(x)$ 為某連續型隨機變數之機率密度函數。
 - (a) (5%) 定義何為充分統計量(sufficient statistics)；
 - (b) (5%) 定義何為最大概似函數估計量(maximum likelihood estimator)；
 - (c) (5%) 定義何為假設檢定中之型一誤差與型二誤差(Type I error & Type II error)。

2. (15%) 考慮一二變量 (X, Y) 之聯合機率密度函數如下：

$$f_{X,Y}(x, y) = e^{-y}; 0 < x < y < \infty.$$

試算機率值 $P(X + Y \geq 1)$ 。

3. (15%) 考量兩獨立隨機變數 X 和 Y 服從標準常態分佈，即 $X \sim N(0, 1)$ 和 $Y \sim N(0, 1)$ 。試求

$U = X/Y$ 與 $V = |Y|$ 之聯合密度函數。

4. 若一函數 $g(x)$ 為凸函數(convex function)，且一隨機變數 X 之期望值 $E(X)$ 與 $E(g(X))$ 皆存在，則 $E(g(X)) \geq g(E(X))$ 。試利用此不等式證明：

- (a) (5%) $E(X^2) \geq \{E(X)\}^2$ ；

- (b) (5%) $E(1/X) \geq 1/E(X)$ ，其中 $P(X > 0) = 1$ 。

5. 考慮一組獨立之隨機樣本 X_1, \dots, X_n 皆服從密度函數為 $f(x|\theta) = e^{-(x-\theta)}$, $x \geq \theta$ 之分佈，其中 $\theta \in R$ 。試求：

- (a) (5%) 參數 θ 之概似函數(likelihood function)；

- (b) (5%) 虛無假設 $H_0: \theta \leq \theta_0$ 與對立假設 $H_a: \theta > \theta_0$ 概似比檢定(likelihood-ratio test)之拒絕域。

國立高雄大學 108 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學

系所：統計學研究所(無組別)

是否使用計算機：否

考試時間：100 分鐘

本科原始成績：100 分

(c) (10%) 試根據上述拒絕域，求 $H_0: \theta \leq \theta_0$ vs. $H_a: \theta > \theta_0$ 顯著水準為 α 之概似比檢定。

6. 假設一組獨立之隨機樣本 X_1, \dots, X_n 皆服從伯努利(bernoulli)分佈，即 $X_i \sim \text{Ber}(p)$ ，其中 $p \in (0,1)$ 為試驗成功之機率。假設 p 之事先分佈(prior distribution)為 $\text{Beta}(\alpha, \beta)$ ：

$$f(p) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} p^{\alpha-1}(1-p)^{\beta-1}, \quad p \in (0,1), \quad \alpha, \beta > 0.$$

(a) (5%) 試求 p 之事後分佈(posterior distribution)；

(b) (5%) 試驗證 p 之貝氏估計量(Bayes estimator)為 p 之事先分佈期望值與 p 之最大概似估計量之線性組合；

(c) (5%) 試根據上述結果解釋貝氏估計量如何再樣本數 n 大或小時，如何偏重事先分佈與觀測樣本所提供之訊息進行估計。

7. 試回答下列敘述正確或錯誤。

(a) (5%) 輔助統計量(ancillary statistic)之分佈與樣本母體參數 θ 無關，故與充份統計量獨立；

(b) (5%) 母體參數 θ 之一致最小變異不偏估計量(uniformly minimum variance unbiased estimator)，是 θ 所有估計量中，變異數最小之估計量。