國立高雄大學 104 學年度研究所碩士班招生考試試題

科目：統計學　　系所：統計學研究所　　是否使用計算機：否
考試時間：100 分鐘　　本科原始成績：100 分

1. （15%）令隨機變數 (X,Y) 滿足聯合密度函數 $f(x,y)=c,\ x^2+y^2\le 4$，則
   (a) 試問 c 為何？ (b) 試求 X 與 Y 的相關係數（correlation）。 (c) X 與 Y 是否獨立？

2. （10%）某廠牌燈管宣稱可使用 10,000 小時，某辦公室最近安裝 40 支該廠牌的燈管，才使用 1 個月（假設為 250 小時）便壞了一支。這是否合理呢？（假設燈管的壽命服從指數分佈，其期望值為 10,000 小時，$e^{-0.025}\cong 0.9753$，$e^{-1}\cong 0.3679$）。

3. （10%）假設連續投擲兩公正骰子，每次計算投擲結果之點數和。試求在看到點數和為 9 之前就先看到點數和為 7 的機率？

4. （10%）假設抽血檢驗某人是否患有特定的疾病。令 X 表示檢驗的結果，$X=1$、0 分別表示檢驗後呈陽性反應及陰性反應。令 θ_1 與 θ_0 分別代表某人有病及無病的事件。又假設 X 之 p.d.f. $f(1;\theta_1)=0.9$、$f(0;\theta_1)=0.1$、$f(1;\theta_0)=0.2$、$f(0;\theta_0)=0.8$。而事前分佈為 $\pi(\theta_1)=0.1$、$\pi(\theta_0)=0.9$。則
   (a) 若某人檢驗結果呈陽性反應，但其無病的機率為何？
   (b) 若某人檢驗結果呈陰性反應，但其有病的機率為何？

5. （10%）設 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 為一組由 *Poisson*(λ) 分佈所產生之隨機樣本，$\lambda>0$。試求 $P(X_1\ge 1)$ 之最大概似估計量（maximum likelihood estimator，MLE）。

6. （20%）設 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 為一滿足 $N(\mu,\sigma^2),\ \mu\in R,\sigma^2>0,$ 分佈的隨機樣本，其中 μ 為未知。則
   (a) 試求 σ^2 的最佳不偏估計量（uniformly minimum variance unbiased estimator，UMVUE）。
   (b) 上述 (a) 中的 UMVUE 之變異數是否達到 CRLB（Cramér-Rao lower bound）？
   (c) 試給出 σ^2 之一信心水準為 $1-\alpha$ 的信賴區間。

7. （15%）設 $X_1,X_2,\ldots,X_n$ 為一滿足 $N(\mu,\sigma^2),\ \mu\in R,\sigma^2>0,$ 分佈的隨機樣本，其中 σ^2 未知。考慮以下的假設檢定 $H_0:\mu=\mu_0$ vs. $H_a:\mu\ne\mu_0$，試求一顯著水準為 α 下之 LRT（likelihood ratio test）？

8. （10%）自某大學中隨機地抽取 1200 位學生，其中 327 位修過統計學，令 θ 表示大學生中修過統計學的比例。試在 $\alpha=0.05$ 之下，檢定 $H_0:\theta=0.25$ vs. $H_a:\theta>0.25$。（$z_{0.95}=1.645$，$z_{0.975}=1.960$）。