

國立高雄大學九十八學年度碩士班招生考試試題

科目：數理統計
考試時間：100 分鐘

系所：
統計學研究所統計組
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

每題20分，須附上該有之步驟。

1. 設 X, Y 為二獨立的隨機變數，以 $U(0, 1)$ 為共同分佈。令 $Z = X/Y$ 。
 - (i) 試求 Z 之機率密度函數(p.d.f) f 。
 - (ii) 驗證 f 確實為一 p.d.f。
 - (iii) 試求 $E(Z)$ 及 $Var(Z)$ 。
 - (iv) 經由變數代換，求 $W = 1/Z$ 之 p.d.f。
2. 設 $X_1, \dots, X_n, n \geq 4$ ，為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\mu \in R, \sigma^2 > 0$ ，皆未知。試求 μ^2/σ^2 之一致最小變異不偏估計量(UMVUE)。
3. 設 $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ ，為一組由 p.d.f. $f(x|\theta) = 2\theta^2 x^{-3}, x \geq \theta > 0$ ，所產生之隨機樣本。
 - (i) 試求 θ 之動差估計量 (moment estimator) S_n 。
 - (ii) 試求 θ 之最大概似估計量(MLE) T_n 。
 - (iii) 試問 S_n 是否為 θ 之一致估計量(consistent estimator)? 即 $n \rightarrow \infty$ 時， S_n 是否機率收斂 (converges in probability) 至 θ 。證明或否證之。
 - (iv) 試問 T_n 是否為 θ 之一致估計量? 證明或否證之。
4. 設 $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ ，為由 p.d.f. $f(x|\theta) = x^{\alpha-1} e^{-x/\theta} / (\Gamma(\alpha)\theta^\alpha), x > 0, \theta > 0$ ，其中 α 為已知，所產生之隨機樣本。又設 $n\alpha > 2$ 。
 - (i) 試求 $q(\theta) = 1/\theta$ 之一 UMVUE $T = T(X_1, \dots, X_n)$ 。
 - (ii) 試判斷 $Var(T)$ 是否達到 CRLB(Cramér-Rao lower bound)。
5. 設 $X_1, \dots, X_n, n \geq 1$ ，為一組由 $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ 分佈所產生之隨機樣本， $\mu \in R, \sigma^2 > 0$ 。
 - (i) 設 μ, σ^2 皆未知，試求 (μ, σ^2) 之一最小充分統計量(minimal sufficient statistic)。
 - (ii) 設 σ^2 已知。欲檢定 $H_0: \mu \geq \mu_0, \text{ vs. } H_a: \mu < \mu_0$ 。試求一顯著水準(significance level) 為 α 下之 UMP(uniformly most powerful) 檢定。