

國立高雄大學九十八學年度碩士班招生考試試題

科目：機率論
考試時間：100 分鐘

系所：
統計學研究所統計組
本科原始成績：100 分

是否使用計算機：否

1. 設隨機變數 X, Y 之聯合分佈為 $f_{X,Y}(1,1) = f_{X,Y}(1,2) = 1/6$, $f_{X,Y}(2,1) = f_{X,Y}(3,2) = 1/8$, $f_{X,Y}(3,1) = f_{X,Y}(3,3) = 1/12$, 及 $f_{X,Y}(2,2) = 1/4$. (i) 試分別寫出 X, Y 之邊際分佈; (ii) 說明 X, Y 是否獨立; (iii) 令 $U = X + Y - 1, V = X/Y$, 試寫出 U, V 之聯合分佈. (15%)
2. 設 X_1, \dots, X_n 為一組由期望值為 λ^{-1} 之指數分佈所生成的隨機樣本, 其中 $\lambda > 0$ 為已知參數. 求 X_1 在給定 $\sum_{i=1}^n X_i$ 下之 (i) 條件分佈; 及 (ii) 條件期望值. (16%)
3. 假設某航空公司之經濟艙有 m 個座位, 且已接受 n 人預訂, 其中 $n > m \geq 1$. 假設每位預訂者獨立地有機率 p ($0 < p < 1$) 會按時搭乘, 則有可能有些乘客因客滿而無法順利搭上該班機. 若以中央極限定理近似, 超過 k 人 ($0 < k \leq n - m$) 搭不上該航班的機率為 $1 - \Phi(w)$. (i) 寫出中央極限定理; (ii) 以 (m, n, k, p) 表示 w 之值. (15%)
4. 設 X, Y 相互獨立且皆服從 $N(0, \sigma^2)$ 分佈. 令 $Z = X * I(Y \leq 0) - X * I(Y > 0)$, 其中 $I(\cdot)$ 為指示函數. 試證明 Z 亦服從 $N(0, \sigma^2)$ 分佈, 然而 $X + Z$ 並不服從常態分佈. (15%)
5. 分別列出負二項(Negative Binomial)分佈及韋伯(Weibull)分佈之 p.d.f., 期望值及變異數. (14%).
6. 設 X, Y 彼此獨立且服從指數分佈, 期望值分別為 $E(X) = \lambda_X^{-1}$ 及 $E(Y) = \lambda_Y^{-1}$. 令 $U = X + Y, V = X - Y$. 試寫出 (i) U, V 之聯合分佈; (ii) U 之邊際分佈; (iii) U 給定 V 之條件分佈; (iv) U 給定 V 之條件期望值及條件變異數. (25%)